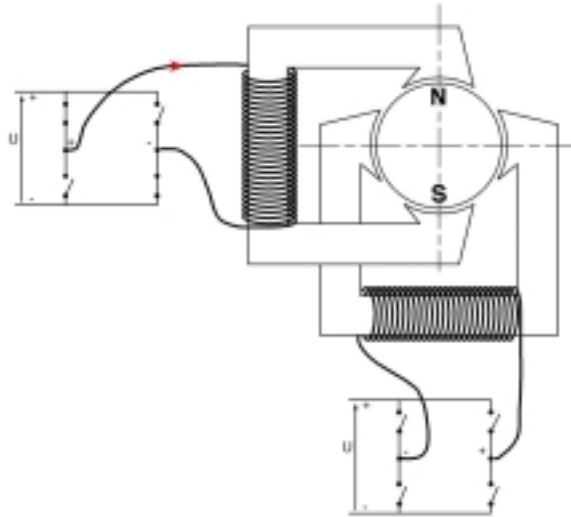


# ELECTRICITE – ELECTROMAGNETISME

## GRANDEURS FONDAMENTALES DE L'ELECTROMAGNETISME



### Objectif du cours :

- Mise en place des bases théoriques et des outils mathématiques permettant de comprendre et modéliser les systèmes magnétiques.
- Être capable à partir d'une structure magnétique d'élaborer la loi électrique liant la tension et le courant alimentant le système :  $U = f(I)$ . Cette relation pouvant être linéaire ou non.

A l'issue de ce cours, les étudiants doivent être à même de mettre en équation les systèmes magnétiques. Cette mise en équation permettant de dimensionner et évaluer les performances d'un système magnétique.

L'application directe du cours est la compréhension de système tel que :

- Relais magnétique
- Bobine de lissage
- Transformateur
- Machines tournantes :
  - Machine à courant continu
  - Machine Synchrone
  - Machine Asynchrone
  - Moteur pas à pas

## SOMMAIRE

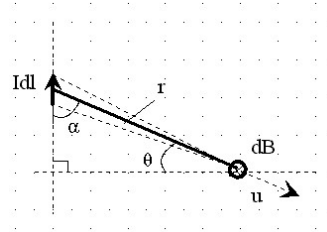
<b>I CHAMP D'INDUCTION MAGNÉTIQUE <math>\vec{B}</math></b> .....	<b>3</b>
I.1 DÉFINITION .....	3
I.2 EXEMPLE DE CALCUL .....	3
I.2.1 Cas d'un fil de longueur infini .....	3
I.2.2 Cas d'une spire circulaire : calcul sur l'axe de la spire .....	4
<b>II CHAMP D'EXCITATION MAGNÉTIQUE <math>\vec{H}</math></b> .....	<b>5</b>
II.1 DÉFINITION .....	5
II.2 THÉORÈME D'AMPÈRE .....	5
II.3 EXEMPLE D'APPLICATION .....	6
<b>III FLUX MAGNÉTIQUE</b> .....	<b>6</b>
III.1 DÉFINITION .....	6
III.2 CAS D'UNE SPIRE INCLINÉE .....	7
III.3 PROPRIÉTÉ : LOI DE CONSERVATION DU FLUX .....	7
III.3.1 Notion de tube d'induction .....	7
III.3.2 Propriété .....	7
<b>IV MILIEUX MAGNÉTIQUES ISOTROPES</b> .....	<b>7</b>
IV.1 RELATION ENTRE $\vec{B}$ ET $\vec{H}$ DANS LE VIDE .....	7
IV.2 MILIEUX MAGNÉTIQUES ISOTROPES .....	8
IV.3 CLASSIFICATION DES MILIEUX MAGNÉTIQUES .....	8
IV.4 LOI COMPORTEMENTALE DES MILIEUX FERROMAGNÉTIQUES : COURBES $B=F(H)$ .....	9
IV.4.1 Courbe de première aimantation et cycle d'hystérésis .....	9
IV.5 CLASSIFICATION DES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES .....	10
IV.5.1 Matériaux durs .....	10
IV.5.2 Matériaux doux .....	11
IV.6. PERTES DANS LA MATIÈRE .....	12
IV.6.1. Energie magnétisante .....	12
IV.6.2. Pertes par hystérésis .....	12
IV.6.3. Pertes par courants de foucault .....	12
<b>V CIRCUITS MAGNÉTIQUES</b> .....	<b>13</b>
V.1 CONSTITUTION .....	13
V.2 MISE EN ÉQUATION : CAS PARFAIT .....	13
V.2.1 Exemple N°1 : Cas d'un circuit magnétique sans entrefer .....	13
V.2.2 Exemple N°2 : Circuit magnétique avec entrefer .....	14
V.3 RÉLUCTANCE – LOI D'HOPKINSON .....	14
V.3.1 Force magnétomotrice .....	14
V.3.2 Réluctance .....	14
V.3.3 Loi d'Hopkinson .....	15
V.4 ANALOGIE MAGNÉTIQUE – ÉLECTRIQUE .....	15
V.5 EXEMPLE D'APPLICATION DE L'ANALOGIE PAR SCHÉMA ÉQUIVALENT .....	16
V.5.1 Circuit avec entrefer .....	16
V.5.2 Circuit avec deux tronçons .....	16
V.6 CALCUL DE L'INDUCTANCE PROPRE D'UN CIRCUIT .....	16
V.7 EXEMPLE D'APPLICATION NUMÉRIQUE : .....	17

## I Champ d'induction magnétique $\vec{B}$

### I.1 Définition

Le champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  traduit l'effet du déplacement des charges électriques. Si un courant constant traverse un conducteur électrique de longueur élémentaire  $dl$ , on écrit localement la **loi de Biot et Savart** :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$



Avec  $dl$  : longueur du circuit soumis au courant  $I$ , orienté dans le sens de  $I$ .

$r$  : distance de l'élément  $dl$  au point d'expression de l'induction  $dB$ , portée par le vecteur  $u$  (vecteur unité allant de  $dl$  vers le point d'expression de  $dB$ ).

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  U.S.I.).

L'induction s'exprime en Tesla.

### I.2 Exemple de calcul

#### I.2.1 Cas d'un fil de longueur infini

Le calcul s'effectue en deux étapes. Nous allons d'abord calculer le champ créé par une portion de fil de longueur  $dl$  puis nous intégrerons le long du fil pour obtenir le champ résultant  $B$ .

- Etude d'un élément  $dl$

On reprend la loi de Biot et Savart

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

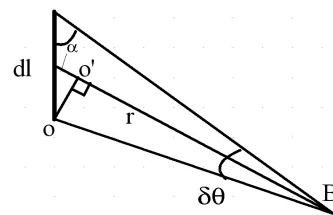
Le calcul du produit vectoriel  $d\vec{l} \wedge \vec{u}$  fait apparaître l'angle  $\alpha$  entre le vecteur  $d\vec{l}$  et le vecteur  $\vec{u}$ . Ainsi  $\left| d\vec{l} \wedge \vec{u} \right| = dl \cdot \sin(\alpha)$ .

Si l'on observe le triangle formé par l'élément  $dl$  et le point de mesure de  $dB$  (Voir figure ci-dessous), on obtient les relations suivantes :

$$OO' = \frac{dl}{2} \sin \alpha$$

$$OO' = r \sin \frac{d\theta}{2} \approx r \frac{d\theta}{2}$$

$$\text{soit : } \boxed{dl \sin \alpha = r d\theta}$$



Ainsi, le module du champ d'induction magnétique créé par l'élément  $dl$  a pour expression :

$$dB = \frac{\mu_0 I d\theta}{4\pi r}$$

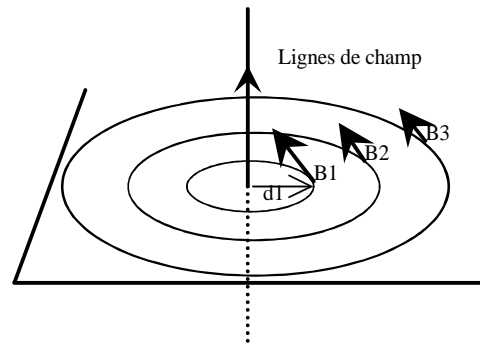
Son orientation est donnée par la règle du tire-bouchon, ici rentrant dans la « feuille » (courant allant du bas vers le haut, champ à calculer à droite).

• Etude pour un fil infini

Dans ce cas, il faut intégrer la valeur du champ  $dB$  sur un angle  $\theta$  allant de  $-\pi/2$  à  $+\pi/2$  :

$$B = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\theta \text{ avec } r = \frac{d}{\cos\theta} \text{ où } d \text{ est la plus petite distance du point de mesure au fil.}$$

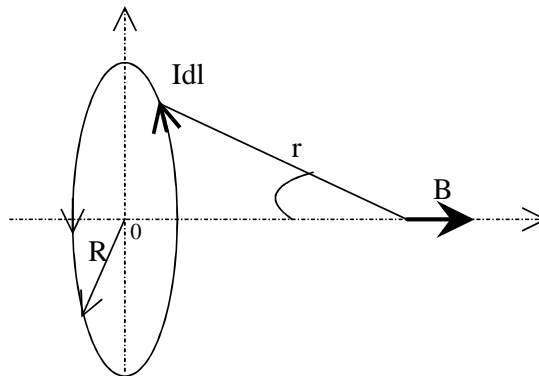
$$B = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\mu_0 I \cos\theta}{4\pi d} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$



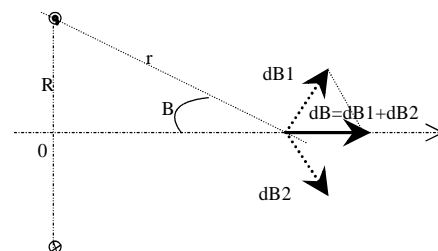
La valeur du champ diminue avec la distance. Par symétrie, les lignes de champ forment des cercles autour du fil.

**I.2.2 Cas d'une spire circulaire : calcul sur l'axe de la spire**

La spire possède un rayon  $R$ . Le point de mesure est à une distance  $r$  de la spire, la spire est vue sous un angle  $\beta$  par rapport à son axe :



Avant d'effectuer le calcul, il faut remarquer que la résultante du champ  $\vec{B}$ , par symétrie, sera parallèle à l'axe de la spire. En effet, deux points de la spire diamétralement opposés ajoutent leur composante axiale mais compensent leur composante radiale.



Seule la composante sur l'axe est donc à calculer :  $dB_x = \left| \vec{dB} \right| \sin \beta$ .

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin \beta \quad (\vec{dl} \wedge \vec{u} = dl)$$

Or :  $dl = r d\theta$  et  $R = r \sin \beta$

Avec  $\theta$  : angle de parcours de la spire vis à vis du point de calcul de B.

Donc :

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{r^3} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2} * \frac{R^2}{r^3}$$

Au centre de la spire le champ d'induction B a pour module :  $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$

Par la suite, dans le domaine de l'électrotechnique, l'induction magnétique ne sera pas à déterminer par la relation de Biot et Savart car les calculs qui en découlent sont trop complexes. Nous utiliserons le vecteur d'excitation magnétique H.

## II Champ d'excitation magnétique $\vec{H}$

### II.1 Définition

Le champ d'excitation  $\vec{H}$  rend compte de l'influence du milieu magnétique sur les grandeurs. Il s'exprime en Ampères par mètre.

Dans le vide ou dans l'air : l'induction et l'excitation magnétique sont colinéaires :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Au sein d'un matériau magnétique : il en est de même. Mais on fait intervenir la perméabilité relative du matériau  $\mu_r$ :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

### II.2 Théorème d'Ampère

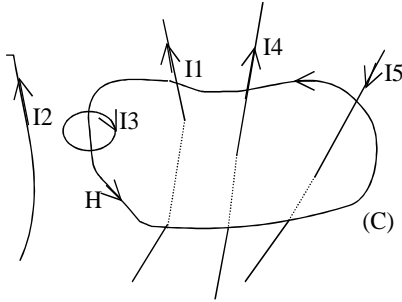
La circulation du vecteur  $\vec{H}$  le long d'une courbe fermée (C) quelconque est égale à la somme algébrique des courants traversant la surface s'appuyant sur le contour (C).

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_j \pm I_j$$

Le courant sera pris positivement si il est dans le sens de la normale à la surface (règle du tire-bouchon par rapport au sens de parcours du contour C).

Le courant sera pris négativement si il est dans le sens contraire de la normale à la surface (règle du tire-bouchon par rapport au sens de parcours du contour C).

Exemple :

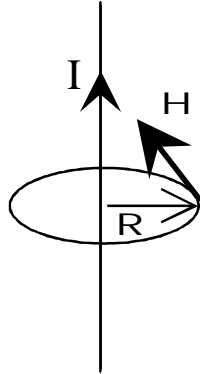


Le courant I2 n'intervient dans le calcul. L'application du théorème d'ampère donne :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I1 - I3 + I4 - I5$$

**II.3 Exemple d'application**

Cas du fil infini :



Les lignes de champ des vecteurs  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  sont des cercles dont l'axe est le conducteur électrique. Nous allons prendre comme contour fermé une ligne de champ située à une distance R. Sur ce contour, le champ est constant.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = H * 2\pi R$$

$$H = \frac{I}{2\pi R}$$

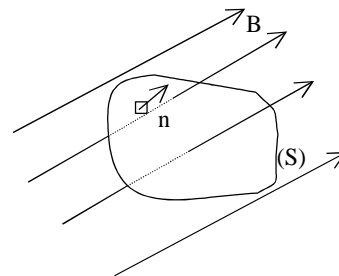
Rq : On retrouve le résultat calculé en I.2.1 ( $B = \mu_0 H$ ).

**III Flux magnétique**

**III.1 Définition**

Le flux du vecteur d'induction magnétique  $\vec{B}$  à travers une surface fermée (S) est définie par :

$$\Phi_S = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$



Avec  $\vec{n}$  vecteur normal à la surface S.

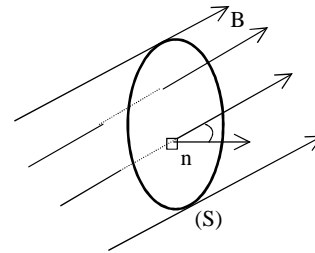
Le flux magnétique s'exprime en Weber (Wb).

### III.2 Cas d'une spire inclinée

On supposera le champ d'induction constant au travers de la spire  $S$ . On appellera  $\alpha$  l'angle entre la normale à la spire et le champ  $B$  :

$$\Phi_S = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S B \cos \alpha \, dS = B \cos \alpha \iint_S dS$$

$$\boxed{\Phi_S = BS \cos \alpha}$$



### III.3 Propriété : loi de conservation du flux

#### III.3.1 Notion de tube d'induction

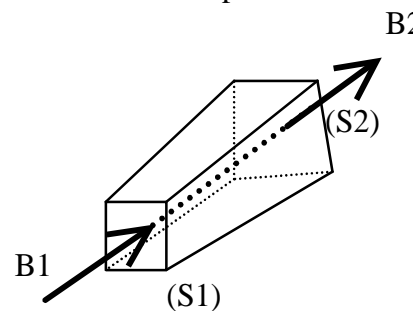
Un tube d'induction (ou de champ) est un morceau d'espace fermé s'appuyant sur deux contours fermés  $C1$  et  $C2$ , où chaque point de  $C1$  est relié à un point de  $C2$  par une ligne de champ magnétique (le champ  $y$  est tangentiel).

#### III.3.2 Propriété

Le flux magnétique est conservé suivant au sein d'un tube de champ.

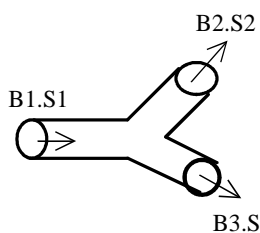
$$\Phi_{S1} = \Phi_{S2}$$

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1 = \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_2$$



On peut généraliser ce principe en disant qu'au sein d'un volume fermé, le flux entrant est égal au flux sortant.

Exemple :



En appliquant la loi de conservation du flux on obtient comme relation :

$$B1.S1 = B2.S2 + B3.S3$$

## IV Milieux magnétiques isotropes

### IV.1 Relation entre $\vec{B}$ et $\vec{H}$ dans le vide

Nous avons déjà vu que dans le vide, le champ d'induction  $\vec{B}$  et le champ d'excitation  $\vec{H}$ , étaient colinéaires et liés par la relation :  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  avec  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide.

### IV.2 Milieux magnétiques isotropes

Au sein d'un matériau, le champ d'excitation  $\vec{H}$  est toujours donné par le théorème d'Ampère. Sous le champ d'excitation  $\vec{H}$ , il va se produire une influence du milieu qui va se superposer au champ d'excitation pour produire le champ d'induction. On définit cette réaction à l'aide du vecteur d'aimantation  $\vec{J}$  :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}$$

Cette aimantation  $\vec{J}$  est proportionnelle au champ d'excitation et peut se mettre sous la forme :  $\vec{J} = \chi \vec{H}$  où  $\chi$  est la susceptibilité magnétique du matériau.

Ainsi le champ d'induction résultant peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Avec  $\mu_r$  la perméabilité relative du matériau et  $\mu_r = (1 + \chi)$ .

On classifera les matériaux suivant la valeur de leur susceptibilité magnétique  $\chi$ .

### IV.3 Classification des milieux magnétiques

Les valeurs données ci-dessous sont valables à température ambiante.

#### $\chi < 0$ : Milieux diamagnétiques

La susceptibilité  $\chi$  est faible et de valeur négative.  $\vec{H}$  et  $\vec{J}$  sont donc de sens contraire.

Matière	susceptibilité $\chi$
Silicium (Si)	$-1,2 \cdot 10^{-6}$
Cuivre (Cu)	$-1,08 \cdot 10^{-6}$
Plomb (Pb)	$-1,4 \cdot 10^{-6}$

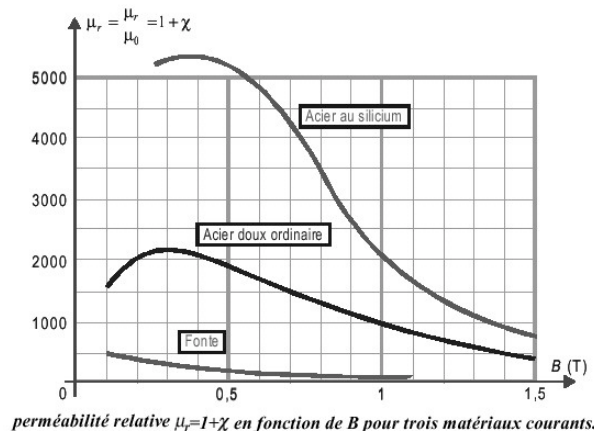
#### $\chi > 0$ : Milieux paramagnétiques

La susceptibilité  $\chi$  est faible et de valeur positive.  $\vec{H}$  et  $\vec{J}$  sont de sens identique.

Matière	susceptibilité $\chi$
Aluminium (Al)	$7,7 \cdot 10^{-6}$
Tungstène (W)	$3,5 \cdot 10^{-6}$
Platine (Pt)	$1,2 \cdot 10^{-5}$

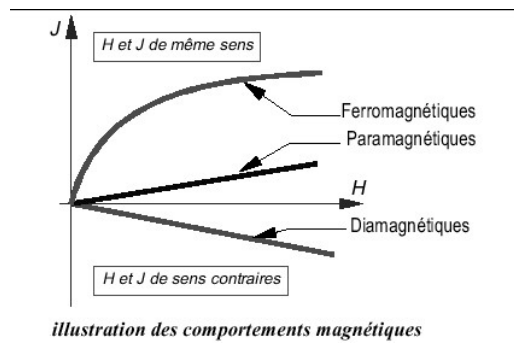
#### $\chi \gg 0$ : Milieux ferromagnétiques

La susceptibilité  $\chi$  est grande. Ces matériaux sont essentiels pour l'électrotechnique. Ils se basent sur l'utilisation du Fer, Cobalt, Nickel et leurs alliages. La courbe ci-dessous donne un ordre de grandeur et l'évolution de la perméabilité relative pour trois matériaux ferromagnétiques en fonction du champ magnétique B qui les traversent.



Il est à noter que la valeur de la susceptibilité  $\chi$  dépend à la fois de la température mais surtout de la valeur du champ d'excitation qui est appliquée au matériau. Cela implique que la relation entre B et H peut se complexifier :  $\Rightarrow B = \mu(H).H$

La figure ci-dessous résume le comportement des 3 catégories de matériaux :

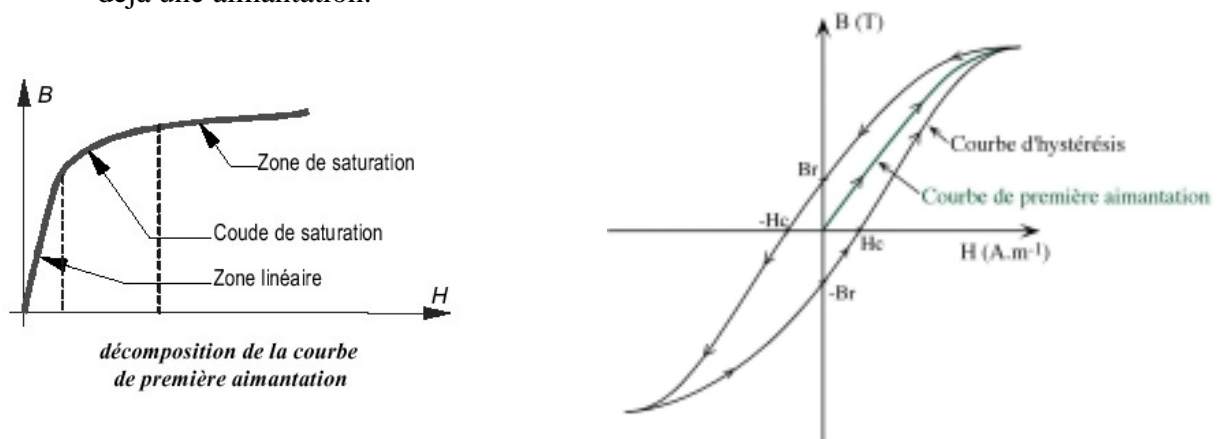


#### IV.4 Loi comportementale des milieux ferromagnétiques : courbes $B=f(H)$

##### IV.4.1 Courbe de première aimantation et cycle d'hystérésis

Ces courbes montrent comment un corps ferromagnétique réagit à l'excitation magnétique H :

- **Courbe de première aimantation** : courbe  $B = f(H)$  lorsque le corps ferromagnétique ne possède aucune aimantation.
- **Cycle d'hystérésis** : courbe  $B = f(H)$  lorsque le corps ferromagnétique possède déjà une aimantation.



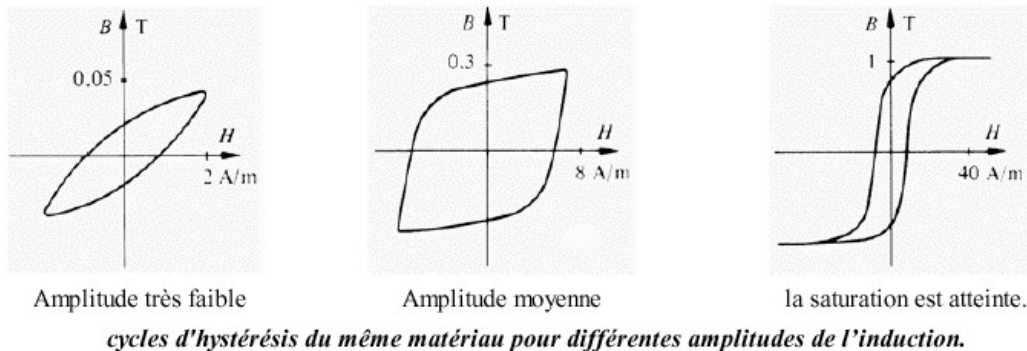
On définit plusieurs zones dans la courbe  $B=f(H)$  :

- **Zone linéaire** : dans cette zone,  $B = \mu.H$  avec  $\mu$  constante. C'est cette zone qui est généralement exploitée pour les transformateurs et les machines tournantes.
- **Saturation du milieu ferromagnétique** : lorsque  $H$  devient trop grand,  $B$  ne varie presque plus. Le matériau magnétique est dit saturé. On a toujours  $B = \mu.H$ , mais  $\mu$  n'est plus constant (« il s'écroule »).  $B$  tend vers le champ de saturation  $B_s$ .
- **Champ rémanent  $B_r$**  : champ qui subsiste lorsque  $H = 0$  ( $i_1 = 0$ ).
- **Excitation coercitive  $H_c$**  : excitation  $H$  nécessaire pour annuler le champ rémanent  $B_r$ .
- **Hystérésis** : c'est le dédoublement de la caractéristique  $B(H)$  du matériau magnétique. *Donc  $B$  dépend non seulement de  $H$ , mais aussi de l'aimantation antérieure.* Les substances ferromagnétiques sont donc douées de mémoire.

Le cycle d'hystérésis a pour conséquence :

Il subsiste une induction rémanente  $B_r$  lorsque l'on annule l'excitation. Si l'on souhaite annuler  $B$ , il faut inverser le champ d'excitation  $H$ , on appelle la valeur de ce champ le champ coercitif  $H_c$ .

Ci dessous, l'évolution de la courbe  $B=f(H)$  pour différentes amplitudes d'excitation :



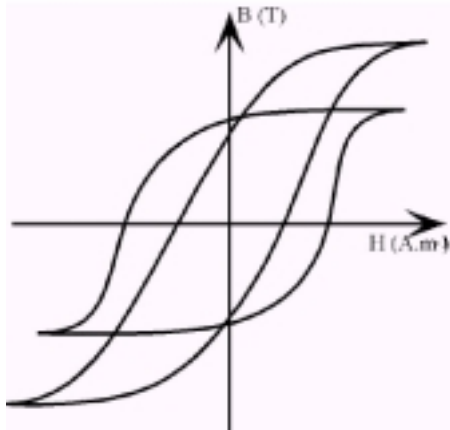
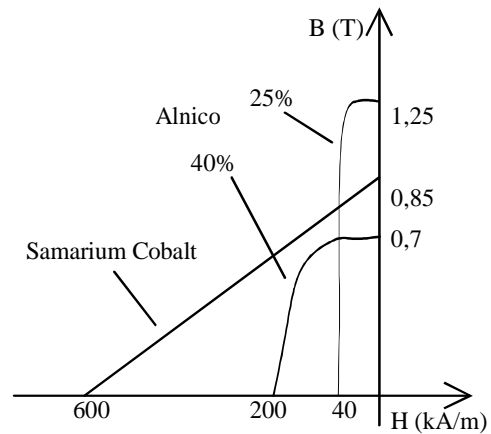
## IV.5 Classification des matériaux ferromagnétiques

On sépare les matériaux magnétiques en deux familles qui se distinguent par leur courbe  $B=f(H)$ .

### IV.5.1 Matériaux durs

Matériaux qui présentent une forte aimantation rémanente et difficile à annuler ( $H_c$  est grand). Ils sont utilisés pour faire des aimants permanents (ex : acier). Ce sont des matériaux qui présentent un cycle d'hystérésis très large ( $10^4 \text{ A/m} < H_c < 10^6 \text{ A/m}$ ).

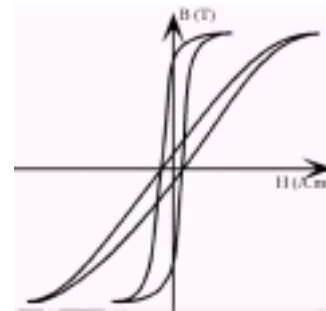
Ils sont utilisés en général comme aimant. On les utilise dans le 4<sup>ème</sup> quadrant ( $B > 0$  et  $H < 0$ ).  $H_c$  devient alors le champ démagnétisant à ne pas dépasser.

Exemples de caractéristiquesEvolution  $B=f(H)$  pour matériaux durs

Caractéristiques d'Aimant

Exemples d'alliages utilisés pour les aimants.Ferrite (oxyde de fer)Saturation à  $\approx 0,6$  T $B_r \approx 0,4$  T -  $H_c \approx 200$  kA/mSamarium-Cobalt (Sm-Co)saturation à  $\approx 1$  T $B_r = 0,8$  T -  $H_c = 500$  kA/m**IV.5.2 Matériaux doux**

Matériaux qui possèdent une aimantation rémanente facile à annuler ( $H_c$  est petit). A l'opposé des matériaux durs, un matériau doux présente un cycle d'hystérésis très petit voir inexistant ( $1E-2$  A/m  $< H_c < 100$  A/m). C'est la base des machines tournantes ou de tout système magnétique voyant une induction alternative ( $\mu_r$  dans la zone linéaire : 50 à  $1E4$ ).



Matériaux doux

Ils sont réalisés à base de Fer. En fonction de l'alliage utilisée, on trouve différente valeur de champ de saturation  $B_s$  :

Fe :  $B_s \rightarrow 2,2$  T.FeSi :  $B_s \rightarrow 1,8$  T.Bonne tenue mécanique  
(Moteur, Transformateur)FeCo :  $B_s \rightarrow 2,4$  T.Faibles pertes  
Cher!!Céramique :  $B_s \rightarrow 0,5$  T.

Très faibles pertes (H.F.)

FeNi :  $B_s \rightarrow 1,3$  Tfaible  $H_c$  (Alim à découpage.)Exemples d'alliages utilisés pour les tôles des transformateurs :FeSi 3,5% de SiSaturation à 2 T -  $B_r \approx 0$  -  $H_c \approx 0$  $\mu_r = 7000$  à 50 HzFeSi à grains orientéssaturation à 3 T -  $B_r = 1,4$  T -  $H_c = 8$  A/m $\mu_r > 40\ 000$  à 50 Hz

## IV.6. Pertes dans la matière

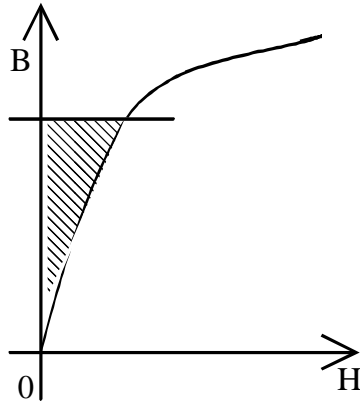
### IV.6.1. Energie magnétisante

Pour obtenir un champ magnétique au sein d'un matériau, cela nécessite l'apport d'une énergie  $\omega$  dite magnétisante. Elle est proportionnelle au volume du matériau:

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = \int_0^B H \cdot dB$$

L'énergie stockable dans un milieu de perméabilité  $\mu$  est:

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

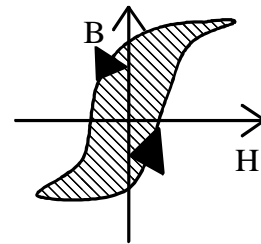


Ainsi dans le cas d'un circuit avec un entrefer, l'essentiel de l'énergie viendra se placer dans celui-ci. Les matériaux magnétiques ont un rôle essentiellement de canaliseur, de circuit de transit. Un transformateur n'aura pas d'entrefer, alors qu'une inductance de lissage aura très certainement un entrefer pour faire office de stockage d'énergie afin de pas saturer le circuit.

### IV.6.2. Pertes par hystérésis

Ce type de perte est lié au cycle d'hystérésis du matériau. Le parcours du cycle  $B(H)$  fait apparaître une perte d'énergie qui correspond alors à un échauffement de la matière. Elles sont donc proportionnelles à la fréquence et sont liées à la structure du matériau.

$$P_h = \alpha \cdot B_M^2 \cdot f$$



Dans le cadre de transformateur, on utilise des matériaux doux pour cette simple raison.

### IV.6.3. Pertes par courants de foucault

Les variations du champ magnétique dans la matière génèrent par induction des courants induits qui se rebouclent sur eux-mêmes. Il y a donc échauffement par effet joule. Cette fois-ci ces pertes sont proportionnelles au carré de la fréquence:

$$P_f = \beta \cdot B_M^2 \cdot f^2$$

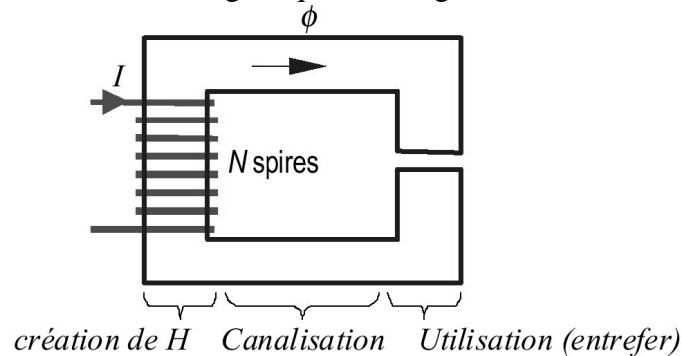
Afin de les limiter, on cherche à réduire le parcours des courants induits, c'est pour cette raison que l'on utilise des circuits magnétiques feuilletés isolés.

## V Circuits magnétiques

Ils sont basés sur l'utilisation de matériaux ferromagnétiques avec comme but d'obtenir un champ d'induction  $B$  dans une zone précise (entrefer). Pour ce faire, on crée un champ d'excitation  $H$  à l'aide de bobinage puis on le canalise vers la zone d'utilisation (entrefer).

### V.1 Constitution

On peut résumer un circuit magnétique à cette géométrie :



On retrouve trois éléments :

① : Le bobinage qui génère l'excitation et donc le champ

② : la culasse qui dirige le champ  $H$  vers la zone utile. La culasse **impose** le parcours du champ magnétique de part sa grande perméabilité par rapport à l'air. Le matériau qui compose la « culasse » se comporte comme un tube de champ.

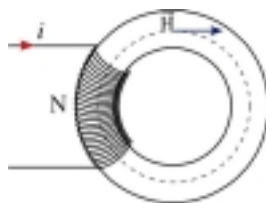
③ : l'entrefer où l'on souhaite utiliser le champ. L'entrefer est la zone d'interaction avec l'extérieur.

### V.2 Mise en équation : cas parfait

La mise en équation se base sur les trois lois fondamentales que nous avons établies :  
Conservation du Flux – Théorème d'Ampère – Loi des matériaux

Dans le cas parfait, le circuit magnétique se confond avec un tube de champ. Tout le flux est canalisé par le circuit. De plus, il a un comportement linéaire en tout point :  $B = \mu H$  ( $\mu = \mu_0 \mu_r$ ). Il en est de même dans l'entrefer :  $B = \mu_0 H$ .

#### V.2.1 Exemple N°1 : Cas d'un circuit magnétique sans entrefer



D'après le théorème d'Ampère :  $HL = NI$

$L$  : longueur moyenne des lignes de champ (m)  
( $L = 2\pi R$ )

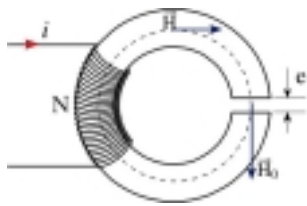
$N$  : nombre de spires de la bobine

$I$  : courant dans la bobine (A)

$H$  : excitation magnétique (A/m)

La valeur du champ magnétique est donc :  $B = \mu_0 \mu_r NI / L$

### V.2.2 Exemple N°2 : Circuit magnétique avec entrefer



D'après le théorème d'Ampère:

$$H(L - e) + H_0 e = NI$$

L : longueur moyenne des lignes de champ (m)

e : longueur de l'entrefer (m)

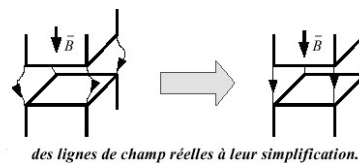
N : nombre de spires de la bobine

I : courant dans la bobine (A)

H : excitation magnétique dans la matière (A/m)

H<sub>0</sub> : excitation magnétique dans l'entrefer (A/m)

En considérant le circuit magnétique parfait, on peut considérer que les lignes de champ restent dans l'alignement du matériau magnétique :



De plus, si  $e \ll L$ , les lignes de champs traversent l'entrefer sans trop de perte.

$$\text{Loi de conservation du flux} \Rightarrow B_{\text{mat}} = B_{\text{air}} \Rightarrow \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = \mu_0 \cdot H_0 \Rightarrow \mu_r \cdot H = H_0$$

$$\mu_r \approx 1000 \text{ pour du fer. } H_0 \text{ est } 1000 \text{ fois plus important que } H !$$

Donc si l'on a besoin d'une excitation donnée dans l'entrefer, on peut calculer le courant qui sera nécessaire. Celui-ci sera d'autant plus faible que  $\mu_r$  sera grand.

On en déduit la valeur du champ magnétique dans l'entrefer :

$$B = \frac{\mu_0 \cdot NI}{\frac{L - e}{\mu_r} + e}$$

## V.3 Réluctance – Loi d'Hopkinson

### V.3.1 Force magnétomotrice

De manière à simplifier l'étude des circuits magnétiques on définit  $\xi$ , la force magnétomotrice, à partir du théorème d'Ampère :

$$\xi = NI = \int_C \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

Le sens de cette force magnétomotrice est donné par la méthode du tire-bouchon en rapport avec le sens de parcours de C.

### V.3.2 Réluctance

De même, en tenant compte de la loi constitutive du matériau, on peut établir en tout point M du parcours C :

$$\vec{H}_M = \vec{B}_M / \mu_M$$

On peut alors exprimer le théorème d'ampère sous la forme :

$$NI = \int_C \frac{\vec{B}_M}{\mu_M} \cdot d\vec{l} = \int_C \frac{\vec{B}_M}{\mu_M} dl = \int_C \frac{\Phi dl}{\mu_M S_M} \text{ soit } NI = \Phi \int_C \frac{dl}{\mu_M S_M}$$

(On suppose B et dl colinéaires)

On définit la réluctance  $\mathfrak{R}$  :

$$\mathfrak{R} = \int_C \frac{dl}{\mu_M S_M}$$

Ainsi, un barreau de longueur L, de section S et perméabilité  $\mu$  aura une réluctance  $\mathfrak{R}$  :

$$\mathfrak{R} = \frac{L}{\mu S}$$

La réluctance dépend de la géométrie du circuit magnétique. Elle peut varier avec l'intensité du champ par l'intermédiaire de  $\mu_r$ .

### V.3.3 Loi d'Hopkinson

En combinant la force magnétomotrice à la réluctance, on obtient alors la relation d'Hopkinson :

$$\xi = NI = \mathfrak{R}\Phi$$

La réluctance  $\mathfrak{R}$  ne dépend que des caractéristiques géométriques du circuit.

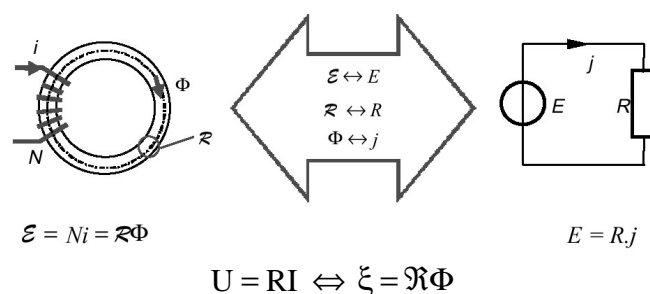
La force magnétomotrice  $\xi$  représente l'excitation qui va générer le flux au sein du circuit mais est indépendante de sa géométrie.

On est donc typiquement dans le cas analogue du générateur de tension que l'on connecte à une résistance ce qui va engendrer un courant I.

$$U = RI \Leftrightarrow \xi = \mathfrak{R}\Phi$$

### V.4 Analogie magnétique – Electrique

L'observation des relations d'Hopkinson permet d'effectuer une analogie avec les circuits électriques linéaires :



A tout circuit magnétique, on peut affecter une représentation électrique permettant d'étudier le comportement du circuit à l'aide de relation électrique.

Le tableau ci-dessous résume l'analogie Magnétique/Electrique :

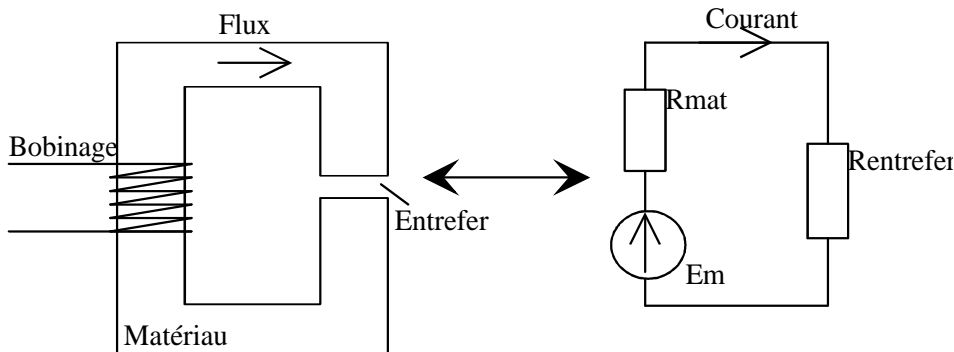
Grandeurs magnétiques	Grandeurs électriques
force magnétomotrice : $\xi = NI$ A/m	force électromotrice : $E$ en Volts (V)
flux d'induction : $\Phi$ en Webers (Wb)	Courant électrique : $i$ en Ampères (A)
Réductance : $\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S}$	Résistance : $R = \rho \frac{l}{S}$
ddp magnétique : $v = \mathfrak{R}\phi$	ddp électrique : $U = RI$
maille magnétique : $\sum v_{maille}$	Maille électrique : $\sum U_{maille} = 0$
nœud magnétique : $\sum \phi_{nœud}$	nœud électrique : $\sum I_{nœud} = 0$

Remarque :

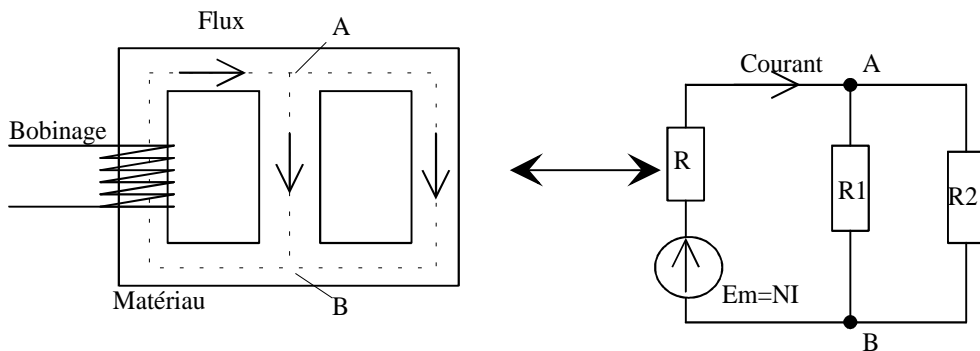
Plus la réductance  $\mathfrak{R}$  d'un circuit est faible ( $\mu_r$  grand), plus il 'attirera' le flux. Un circuit à forte perméabilité canaliser le flux et se comportera comme un tube de champ.

### V.5 Exemple d'application de l'analogie par schéma équivalent

#### V.5.1 Circuit avec entrefer



#### V.5.2 Circuit avec deux tronçons



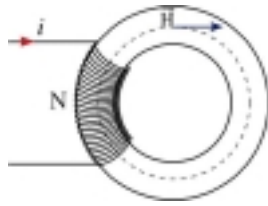
### V.6 Calcul de l'inductance propre d'un circuit

L'inductance d'un circuit est définie par le rapport entre le flux total vu par le bobinage (composé de  $N$  spires) divisé par le courant d'excitation :

$$L = \frac{\Phi_T}{I} = \frac{N\Phi}{I} \text{ avec } \Phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}}$$

$$\boxed{L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}}$$

Tout comme la réductance, une inductance peut varier avec l'intensité du champ donc du courant.

**V.7 Exemple d'application numérique :**

Tore de section circulaire :  
 Rayon intérieur :  $r_i=10$  cm  
 Rayon extérieur :  $r_e=15$  cm  
 Nombre de spires : 500  
 $I=0.5$  A  
 $\mu_r=2000=Cste$

Calculez  $L$ ,  $\Phi$ ,  $L$ ,  $B$  et l'énergie stockée dans  $L$  ?

$$\text{Section du tore : } S = \pi r^2 \text{ avec } r = \frac{r_e - r_i}{2} = 2.5 \text{ cm} \Rightarrow S = 1.9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\text{Rayon moyen : } r_m = \frac{r_e + r_i}{2} = 12.5 \text{ cm} \Rightarrow \text{longueur moyenne du tore } L = 2\pi r_m = 0.785 \text{ m}$$

$$\text{Réductance du circuit : } \mathfrak{R} = \frac{L}{\mu_0 \mu_r S} = 1.59 \cdot 10^5 \text{ A/Wb}$$

$$\text{Flux : } \Phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}} = 1.57 \text{ mWb}$$

$$\text{Inductance : } L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} = 1.57 \text{ H}$$

$$\text{Champ moyen : } B = \frac{\Phi}{S} = 0.8 \text{ T}$$

$$\text{Energie : } W = \frac{1}{2} LI^2 = 0.19 \text{ J}$$