Application classique du principe de Fermat

Pierre de Fermat proposa que les rayons lumineux répondaient à un principe très général selon lequel le chemin emprunté par la lumière pour se rendre d'un point donné à un autre était celui pour lequel le temps de parcours était minimum (en fait un extremum qui peut être un minimum ou un maximum).

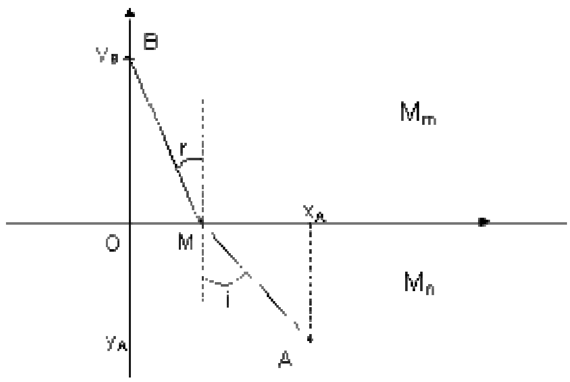
Considérons deux milieux M_n et M_m d'indices de réfraction respectifs n et m et dont la surface de contact est plane. Prenons deux points A et B situés respectivement dans le milieu d'indice n (le point A) et dans le milieu d'indice m (le point B).

Considérons le chemin de la lumière allant de A à B. Le principe de Fermat nous enseigne que le chemin emprunté par la lumière est tel que le temps mis pour le parcourir est minimum. Nous nous proposons dans un premier temps d'appliquer une méthode classique pour calculer le chemin du rayon lumineux et dans un second temps, nous montrerons que le principe de Fermat peut être énoncé comme un principe variationnel.

Choisissons un repère qui simplifie le problème : faisons passer l'axe des abscisses par le plan de contact des deux milieux et l'axe des ordonnées par le point B. Dans un tel repère, les points A et B ont les coordonnées suivantes : A (x_A, y_A), B (0, y_B).

Appelons M (x,0), le point où le rayon lumineux traverse la surface de contact entre les deux milieux. Le temps T mis pas la lumière pour aller de A à B est alors :

$$T = \frac{AM}{v_n} + \frac{MB}{v_m} = \frac{n.AM}{c} + \frac{m.MB}{c}$$



où v_n et v_m sont les vitesses de la lumière dans les milieux M_n et M_m . En développant les valeurs de AM et MB on obtient la dépendance suivante de T en fonction de la position x de M :

$$T(x) = \frac{n.\sqrt{(x_A - x)^2 + y_A^2}}{c} + \frac{m.\sqrt{x^2 + y_B^2}}{c}$$

Le chemin emprunté par la lumière est celui pour lequel T est minimum. L'extremum de T(x) est atteint lorsque sa dérivée par rapport à x est nulle.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{n}{c}.\frac{(x - x_A)}{\sqrt{(x_A - x)^2 + y_A^2}} + \frac{m}{c}.\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_B^2}}$$

Notons que $\frac{(x - x_A)}{\sqrt{(x_A - x)^2 + y_A^2}} = \frac{(x - x_A)}{AM} = -\sin(i)$ et $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_B^2}} = \frac{x}{MB} = \sin(r)$.

La condition d'un temps extremum mis par la lumière s'exprime alors :

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{c}\sin(i) + \frac{m}{c}\sin(r) = 0$$

D'où l'on tire la relation, connue sous le nom de loi de Snell-Descartes :

$$n.\sin(i) = m.\sin(r)$$

Il suffit que les angles d'incidence et de réfraction remplissent cette condition pour que le chemin parcouru par la lumière soit effectivement celui qui prend le moins de temps.

Principe de Fermat et Principe de moindre action

Le principe de Fermat présente d'évidentes similitudes avec le principe de moindre action en cela qu'il consiste en un principe du minimum. Bien qu'une description rigoureuse de la lumière nécessite l'introduction de la mécanique quantique il est toutefois possible de l'appréhender par le biais de la mécanique classique et de lui appliquer, sous certaines conditions, le principe de moindre action. Nous allons montrer que nous retrouvons ainsi le principe de Fermat. Les calculs que nous allons présenter introduisent de nombreuses hypothèses hasardeuses mais en tout état de cause, ce procédé doit être considéré comme une approximation. A noter que le principe de Fermat procède lui aussi d'une même approximation que l'on peut qualifier de « limite classique ».

Imaginons que la lumière est composée de « grains » matériels. Il faut alors admettre que ces « grains » obéissent à des propriétés physiques plutôt singulières : leur masse est nulle puisque selon la description classique, les rayons lumineux ne sont pas déviés par le champ gravitationnel. Cette absence de masse les rend donc insensibles au champ gravitationnel terrestre.

Ecrivons l'action pour l'un de ces « grains » de lumière :

$$S = \int (T - U).dt$$

Or, en supposant que le seul champ présent est le champ gravitationnel, nous avons mis en évidence que la lumière y était insensible, il s'ensuit que l'action de la lumière peut s'écrire :

$$S = \int T\,dt$$

Or, aucune force ne s'applique sur la lumière, par conséquent l'énergie cinétique T est une constante du mouvement. Appliquons le principe variationnel de moindre action :

$$\delta S = 0 = \delta\left(T\int dt\right) = T\,\delta\int dt$$

D'où nous tirons :

$$\delta\int dt = 0$$

Cette équation signifie que le temps mis par la lumière le long de sa trajectoire est minimum (ou plus généralement, est un extremum). Nous retrouvons le principe de Fermat. Nous avons donc montré, qu'à la limite classique et sous certaines hypothèses, le principe de Fermat découle directement du principe de moindre action.